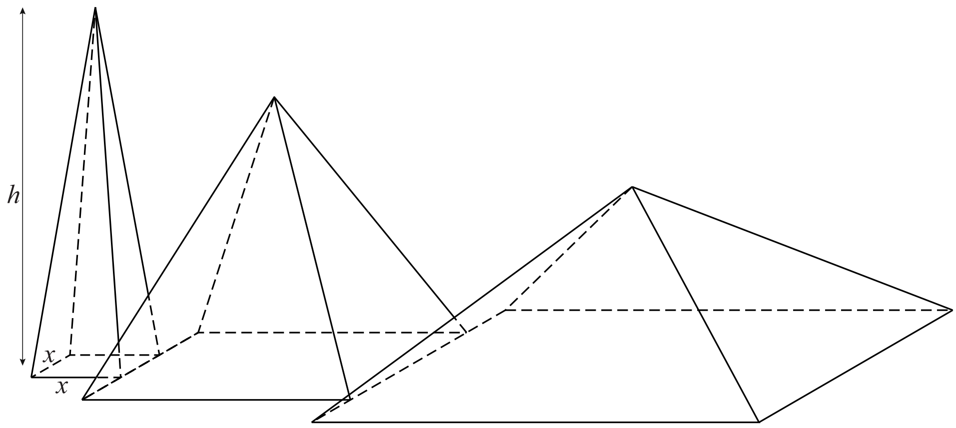
Piramiden

Een kunstenaar ontwerpt een kunstwerk. Hij wil een serie piramiden maken, elk met een vierkant grondvlak. Hij wil dat het grondvlak van de opeenvolgende piramiden steeds groter wordt en de hoogte steeds kleiner. In onderstaande figuur zie je de eerste drie piramiden van een mogelijk ontwerp.

figuur



De kunstenaar gaat de piramiden uitvoeren in beton. Hij moet dus weten hoeveel beton hij nodig heeft. Daarom rekent hij met de formule voor de inhoud van een piramide. De zijde van het vierkante grondvlak, uitgedrukt in dm, noemt hij x. De hoogte van een piramide in dm noemt hij h. Zie de figuur.

De kunstenaar kiest voor een lineair verband tussen h en x en daarvoor gebruikt hij de volgende formule: $h = 9 - ax$. Omdat hij nog niet wil vastleggen hoe snel de hoogte afneemt, gebruikt hij de letter a in deze formule.

Voor de inhoud van een piramide geldt de volgende formule:

$$I = \tfrac{1}{3} \cdot \textit{oppervlakte grondvlak} \cdot \textit{hoogte}$$

In eerste instantie neemt de kunstenaar $a = 1$.

3p **1** Bereken in deze situatie de inhoud van zo'n piramide met een grondvlak van 2,5 bij 2,5 dm.

Als de waarde van a nog niet gekozen is, geldt voor de inhoud van zo'n piramide de volgende formule:

$$I = \tfrac{1}{3}x^2(9 - ax)$$

Hierin is I de inhoud in dm^3 en x de lengte van de zijde van het grondvlak in dm.

Als de kunstenaar eenmaal een waarde voor a gekozen heeft, liggen de afmetingen en dus de inhoud van de piramide nog niet vast. Als x verandert, verandert ook de inhoud I.
Neem voor de volgende vraag weer $a = 1$.

4p **2** Toon met behulp van differentiëren aan dat de inhoud van zo'n piramide dan maximaal is voor $x = 6$.

De kunstenaar maakt een nieuw ontwerp. Hij wil de breedte van het grondvlak van de piramiden constant houden en zowel de lengte als de hoogte laten veranderen.
In zijn nieuwe ontwerp is de breedte van het grondvlak van een piramide gelijk aan 2 dm en de lengte van dat grondvlak gelijk aan x dm. Voor de hoogte in dm van een piramide neemt hij weer: $h = 9 - ax$.
Voor de inhoud van een piramide in dit nieuwe ontwerp geldt dan de formule:

$$I = 6x - \tfrac{2}{3}ax^2$$

3p **3** Toon dit aan door deze formule af te leiden uit de gegevens.

Als $a = 0,5$ is de inhoud van zo'n nieuwe piramide maximaal als $x = 9$. De waarde van x waarvoor de inhoud van zo'n nieuwe piramide maximaal is, is niet steeds gelijk, maar hangt af van a. Deze waarde van x noemen we x_{MAX}.

4p **4** Teken in het assenstelsel op de uitwerkbijlage de grafiek van het verband tussen x_{MAX} en a. Licht je werkwijze toe.

uitwerkbijlage

4